$\boxed{3}$ 1辺の長さ1の正四面体OABCがあり $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺OAの中点をM　辺OBを 3 : 1 に内分する点をLとし　2直線AL, BMの交点をPとする。

（１） $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

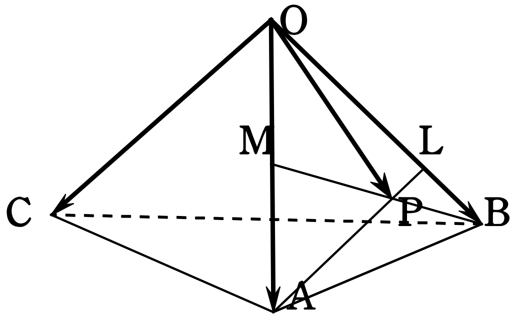
（２）Oを中心とし　直線CPに接する球面をSとする。

（ｉ）Sと直線CPの接点をHとするとき　$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

（ii）Sと辺OAの交点をQとする。（ｉ）のHに対して四面体HABCの体積と四面体OQBCの体積の比を求めよ。

解答

正四面体の図示　4つの面は1辺の長さが1の正三角形　右図



（１）線分ALを $t:(1-t)$　線分BMを $s:(1-s)$ に内分する点をPとする。

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OL}+(1-t)\overrightarrow{OA}$$

$$=\frac{3}{4}t\vec{b}+(1-t)\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OM}+(1-s)\overrightarrow{OB}$$

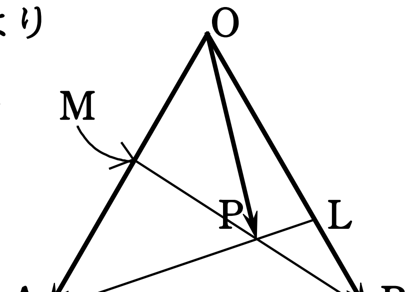
$$=\frac{s}{2}\vec{a}+(1-s)\vec{b}$$

ゆえに　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ より

$1-t=\frac{s}{2}$, $\frac{3t}{4}=1-s$

よって　$t=\frac{4}{5}$, $s=\frac{2}{5}$



（２）（ｉ）Hは線分CP上にあるから

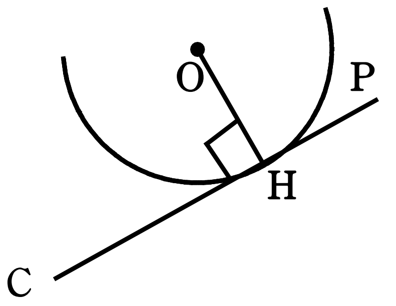
$$\overrightarrow{OH}=u\overrightarrow{OP}+(1-u)OC$$

$$=\frac{u}{5}\vec{a}+\frac{3u}{5}\vec{b}+(1-u)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}-\vec{c}$$

CP⊥OHであるから内積 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OH}=0$

$$\frac{1}{5}\left\{(\vec{a}+3\vec{b})-5\vec{c}\right\}\cdot\frac{1}{5}\left\{u(\vec{a}+3\vec{b})+5(1-u)\vec{c}\right\}=0$$



$$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}\ +9|\vec{b}|^2=1+6\times\frac{1}{2}+9=13$$

$$\{-5u+5(1-u)\}\,\vec{c}\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$$

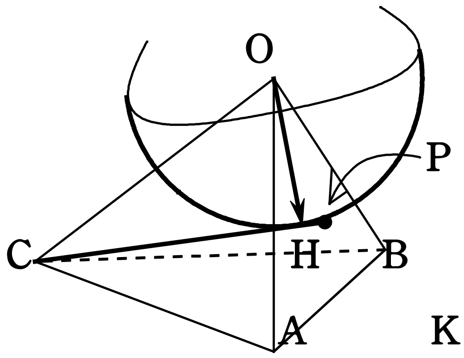
$$=(5-10u)(\vec{c}\cdot\vec{a}+3\vec{c}\cdot\vec{b})=(5-10u)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=10(1-2u)$$

$$-25(1-u)|\vec{c}|^2=25(u-1)$$

従って $13u\ +10(1-2u)+25(u-1)=0$ よって $18u=15$　ゆえに $u=\frac{5}{6}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{u}{5}\vec{a}\ +\frac{3u}{5}\vec{b}\ +(1-u)\vec{c}$

$$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

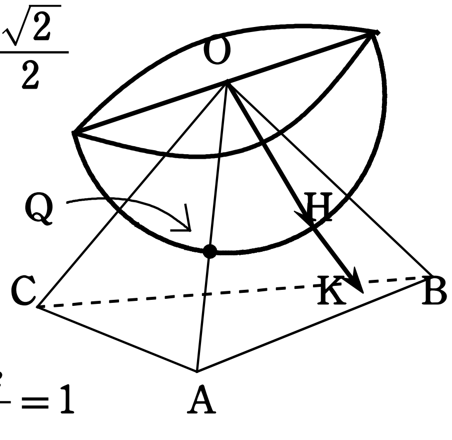


（ii）球面Sの半径 $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\ \cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

$$=\frac{1}{36}(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c})$$

$=\frac{1}{2}$（計算省略）　ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$



次に　直線OHと平面ABCとの交点をK

とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\ =k\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

$$=\frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ +\frac{k}{2}\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\ +\frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

Kは平面ABC上にあることから　$\frac{k}{6}+\frac{k}{2}+\frac{k}{6}=1$

よって　$k=\frac{6}{5}$ すなわちOKはOHの $\frac{6}{5}$ 倍

従って正四面体OABCの体積Vとおくと　四面体HABCの体積 $V_1=\frac{1}{6}V$

次に　四面体OQBCの体積

$\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OQ}=\mathrm{OH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 従って四面体OQBCの体積 $V_2=\frac{\sqrt{2}}{2}V$

ゆえに　四面体HABCの体積と四面体OQBCの体積の比

$$V_1 : V_2 = \frac{1}{6}V : \frac{\sqrt{2}}{2}V = 1 : 3\sqrt{2}$$

$\boxed{4}$　座標平面上に曲線 C_1: $y=e\log x$ がある。ただし e は自然対数の底である。

（1） C_1 と x 軸および直線 $x=e$ で囲まれた部分をx 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

（2） C_1 上の点 $P(e,\ e)$ における C_1 の法線を l とし　l と y 軸との交点をQとする。またQを中心としてPを通る円を C_2 とする。

（i） C_2 の方程式を求めよ。

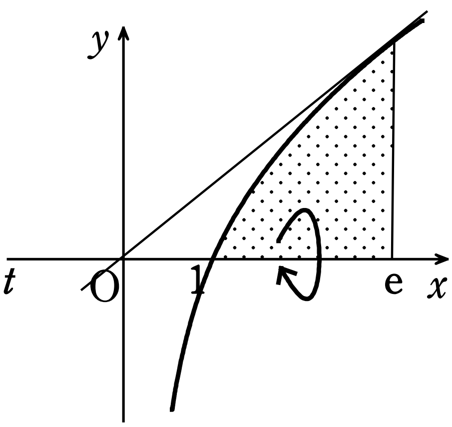
（ii） C_2 と y 軸との交点のうち原点に近い方をRとする。 C_2 の短い方の円弧PRと C_1 および x 軸と y 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

解答

（1）立体の体積

$$V_1 = \pi\int_1^e (e\log x)^2 dx = \pi e^2 \int_1^e (\log x)^2 dx$$

$\int_1^e (\log x)^2 dx = I_1$ とおく。



置換積分　$\log x = t$ とおく　微分　$\frac{1}{x}dx = dt$

$x=1$ のとき $t=0$　　$x=e$ のとき $t=1$

$$I_1 = \int_0^1 t^2 \cdot x\,dt = \int_0^1 t^2 e^t dt = \int_0^1 t^2 (e^t)' dt$$

$$= \left[t^2 e^t\right]_0^1 - \int_0^1 2t(e^t)' dt = e - 2\left\{\left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right\} = e - 2(e - e + 1) = e - 2$$

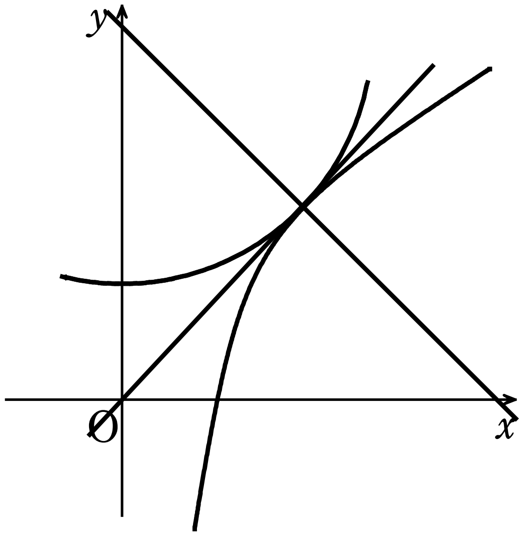
従って $V_1 = \pi e^2 (e-2)$

（2）（i） $y = e\log x$ のとき $y' = 1$ よって　C_1 上の点 $P(e,\ e)$ における C_1 の接線 の方程式 $y - e = x - e$より $y = x$　Pにおける接線は原点を通っている。

従って　Pにおける C_1 の法線 lの方程式 $y-e=-(x-e)$　　$y=-x+2e$

また C_2 の中心 $Q(0,\ 2e)$ 半径 $\dfrac{2e}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ e$ であるから　求める C_2の方程式

$x^2+(y-2e)^2=2e^2$



（ii） 円 C_2，x 軸, y 軸　直線 $x=e$

で囲まれた部分の図形を x 軸周りに1回転

して得られる立体の体積　$V_2=\pi\int_0^e y^2dx$

ただし $x^2+(y-2e)^2=2e^2$，$y-2e\leqq 0$

よって $y=2e-\sqrt{2e^2-x^2}$

$$I_2=\int_0^e\left\{2e-\sqrt{2e^2-x^2}\right\}^2dx$$

$$=\int_0^e\left\{(6e^2-x^2)-4e\sqrt{2e^2-x^2}\right\}dx=\int_0^e(6e^2-x^2)dx-4e\int_0^e\sqrt{(\sqrt{2}\,e)^2-x^2}\,dx$$

ここで　$\displaystyle\int_0^e(6e^2-x^2)dx=\left[6e^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^e=6e^3-\frac{e^3}{3}=\frac{17e^3}{3}$

$\displaystyle\int_0^e\sqrt{(\sqrt{2}\,e)^2-x^2}\ dx$　　$x=\sqrt{2}\,e\sin\theta$ とおく　微分　$dx=\sqrt{2}\,e\cos\theta d\theta$

$x=0$ のとき$\theta=0$　$x=e$ のとき$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_0^e\sqrt{(\sqrt{2}\,e)^2-x^2}\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{(\sqrt{2}\,e)^2-(\sqrt{2}\,e\sin\theta)^2}\ \sqrt{2}\,e\cos\theta\,d\theta$$

$$=2e^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta=2e^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=e^2\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$=e^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right)$ 従って $V_2=\dfrac{17\pi e^3}{3}-4e\cdot\pi e^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=-\pi^2e^3+\dfrac{11\pi e^3}{3}$

ゆえに　求める立体の体積V$=V_2-V_1=\pi e^2\left(-\pi e+\dfrac{8e}{3}+2\right)$

5　指定選択問題（配点40点）

2つの複素数 z と w の間に　$w=\dfrac{\beta z}{z-\alpha}$ なる関係式がある。

ここでα，βは複素数の定数であり i を虚数単位として　$z=1$ のとき $w=2i$　$z=2$ のとき $w=2+2i$ であるとする。

（１）複素数α，βの値を求めよ。

（２）複素数平面上において 点 z が実軸上を動くとき　点 w が描く軌跡を図示せよ。

（３）複素数平面上において点 z が実軸の0以上の部分を動くとき　点 w が描く軌跡を C_1　点 $(1+i)w$ が描く図形 C_2 とし　C_1 と C_2 を合わせたものを C とする。C が囲む部分の面積を求めよ。

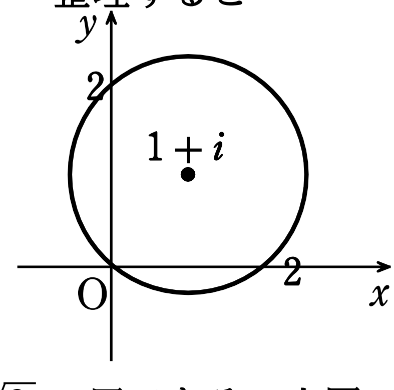
解答

（１）連立方程式

$2i=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$，$2+2i=\dfrac{2\beta}{2-\alpha}$　βを消去　$4i(1-\alpha)=2(1+i)(2-\alpha)$　解くと

$\alpha=1+i$，$\beta=2$

（２）$w=\dfrac{2z}{z-(1+i)}$　z について解くと　$z=\dfrac{(1+i)w}{w-2}$　点 z が実軸上を動くことから　$z=\overline{z}$　よって $\dfrac{(1+i)w}{w-2}=\dfrac{(1-i)\overline{w}}{\overline{w}-2}$　整理すると



$2iw\overline{w}-2(1+i)w+2(1-i)\overline{w}=0$

$w=x+yi$ とおく。従って　実数x，y を用いて

実部　虚部に整理すると

$i(x^2+y^2-x-y-x-y)+(-x+y+x-y)=0$

$x^2+y^2-2x-2y=0$ より $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

点 w が複素数平面上で描く図形は中心 $1+i$ 半径 $\sqrt{2}$ の円である。上図

（３）複素数平面上において点 z が実軸の0以上の部分を動くとき　点 w が描く図形は（２）で求めた円のうち半円部分であると考えられる。実数 z について$z=1$ のとき $w=2i$　$z=2$ のとき $w=2+2i$ より軌跡 C_1 が得られる。

また $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

であるから　点 $(1+i)w$ の軌跡 C_2

は C_1 を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転して $\sqrt{2}$

倍に拡大した半円である。右図

C_1 と C_2 を合わせたものを C と

する。C が囲む部分の面積　…？